



Bending Analysis of Nanoplates Resting on Elastic Foundation

Minh Chinh Van, Minh Tiến Đào, Van Thom Do and
Như Mai Đào

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

April 11, 2024

Uốn tĩnh của tấm nano trên nền đàn hồi

Văn Minh Chính¹, Đào Minh Tiến¹, Đỗ Văn Thơm^{2*} và Đào Như Mai³

¹Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

²Khoa Cơ khí, Học viện KTQS

³Viện Cơ học, VAST

*Email: thom.dovan.mta@gmail.com

Tóm tắt: Bài báo trình bày phương pháp mô phỏng hữu hạn để phân tích đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano tựa trên nền đàn hồi và có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng từ. Các biểu thức tính toán và phương trình cân bằng của tấm được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, để giải phương trình cân bằng, bài báo sử dụng lưới chia gồm các phần tử chữ nhật bốn nút, mỗi nút có sáu bậc tự do. Sự tin cậy và tính hội tụ của lời giải được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã được công bố. Trên cơ sở đó, bài báo đưa ra một số kết quả số để khảo sát ảnh hưởng của vài tham số hình học, vật liệu, điều kiện biên, nền đàn hồi đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano. Nghiên cứu này là tài liệu tham khảo có giá trị cho các kỹ sư, phục vụ có hiệu quả khi sử dụng các kết cấu này trong thực tiễn.

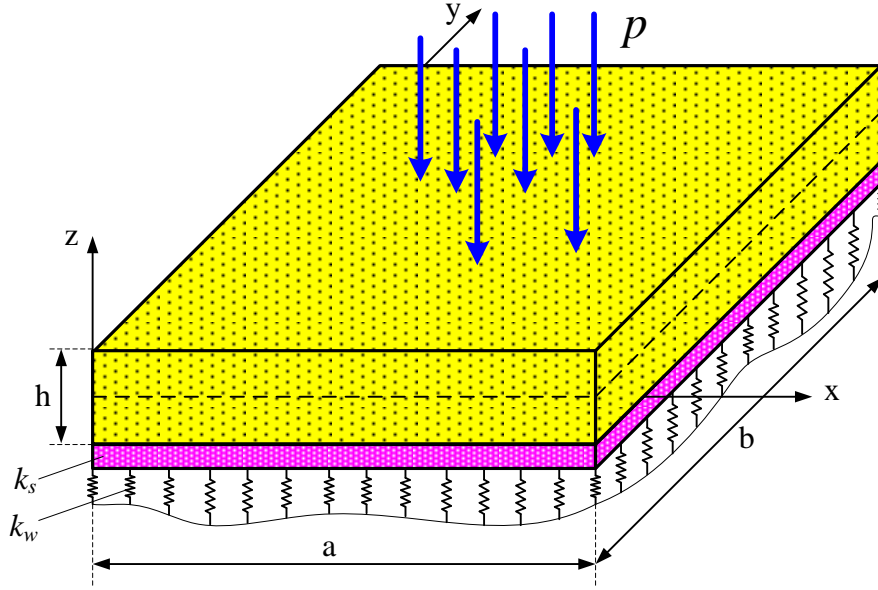
Từ khóa: uốn tĩnh, nền đàn hồi, lý thuyết biến dạng cắt, phương pháp phần tử hữu hạn.

1. Mở đầu

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, nhiều loại vật liệu mới đã được tìm ra và ứng dụng rộng rãi trong thực tế, ví dụ như vật liệu cơ tính biến thiên, vật liệu composite được gia cường bởi các ống nano hoặc gia cường bởi graphene, vật liệu có hiệu ứng áp điện, flexoelectric, hiệu ứng từ,... Và để đảm bảo áp dụng có hiệu quả nhất các vật liệu này trong thực tiễn, cần có nghiên cứu tổng quan trên nhiều lĩnh vực khác nhau, trong đó cần có các nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu làm từ các vật liệu này. Dục và nhóm nghiên cứu [1] đã kết hợp giữa phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết phase-field để chỉ ra đáp ứng dao động riêng của tấm nano có vết nứt và chịu ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Phương pháp phần tử hữu hạn cũng được Thai và các đồng nghiệp [2] sử dụng để chỉ ra ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectricity đến đáp ứng cơ học của tấm nano tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Tho và nhóm nghiên cứu [3] đã nghiên cứu đáp ứng cơ học của dầm nano có xét đến ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu, trong đó dầm tham gia chuyển động quay quanh một trục cố định. Dục cùng các đồng nghiệp [4] đã nghiên cứu ảnh hưởng của sự biến đổi chiều dày đến đáp ứng dao động và ổn định của tấm nano. Tiếp theo đó, các tác giả này cũng chỉ rõ ảnh hưởng của quy luật biến đổi chiều dày tấm nano và vết nứt đến ổn định của tấm nano [5]. Zhang và cộng sự [6] đã sử dụng lời giải dạng giải tích để giải quyết bài toán uốn tĩnh, dao động và ổn định của dầm nano. Tien và nhóm nghiên cứu [7] đã kết hợp nhiều lý thuyết tấm khác nhau với phương pháp phần tử hữu hạn để mô phỏng đáp ứng uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano. Từ các công trình đã công bố, có thể thấy rằng đáp ứng của tấm nano tựa trên nền đàn hồi và chịu ảnh hưởng của hiệu ứng từ là vấn đề cần được nghiên cứu, do vậy bài báo này sẽ giải quyết bài toán này bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

2. Thiết lập phương trình cân bằng và phương pháp giải

Tấm nano có mô hình như trong Hình 1. Tấm có các thông số hình học gồm chiều dài a , chiều rộng b , chiều dày h , tấm đặt trong hệ quy chiếu $Oxyz$, tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số k_w và k_s .



Hình 1. Tấm nanoplates tựa trên nền đàn hồi hai hệ số

Để xây dựng các biểu thức tính toán, bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt hình sin cải tiến [8-9], trường chuyển vị tại một điểm bất kỳ của tấm được viết như sau:

$$u_x = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial x}; u_y = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial y}; w_z = w_b + w_s \quad (1)$$

trong đó $f_z = z - \varrho_z$, $\varrho_z = h \cdot \sin \frac{z}{h} - z \cdot \cosh \frac{1}{2}$; u_x , v_y , và w_z các chuyển vị thẳng theo các trục Ox , Oy , và Oz .

Các thành phần biến dạng dài và biến dạng cắt có dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{bx} \\ \varepsilon_{by} \\ \gamma_{bxy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b} + f_z \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{sx} \\ \varepsilon_{sy} \\ \gamma_{sxy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}; \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varrho_z}{\partial z} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varrho_z}{\partial z} \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (2)$$

Hai thành phần biến thiên biến dạng theo trục Ox và Oy được tính như sau:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \eta_{yyz} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \end{Bmatrix} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\eta}_b + \frac{\partial f_z}{\partial z} \boldsymbol{\eta}_s \quad (3)$$

Do tấm có kể đến hiệu ứng từ, quan hệ ứng suất và biến dạng được tính theo biểu thức:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k; \chi_{ijm} = -f_{kijm} E_k; Q_i^0 = c_{ijk} \varepsilon_{jk} + d_{ij} E_k + f_{ijkl} \eta_{jkl} \quad (4)$$

trong đó $c_{ijkl}, q_{kij}, f_{kijm}$ và d_{ij} là các hằng số đàn hồi, hằng số điện từ, hệ số flexomanetic và hệ số từ thâm. Q_i^0 là từ thông, và χ_{ijm} mô men bậc cao.

Biểu thức (4) được khai triển cụ thể dưới dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - q_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} H_z = \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{H}; \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xxz} \\ \chi_{yyz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{14} & 0 \\ 0 & r_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} \\ \eta_{yyz} \end{Bmatrix} - f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E_z; \quad (6)$$

$$Q_z^0 = q_{31} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + d_{33} H_z + f_{14} (\eta_{xxz} + \eta_{yyz})$$

trong đó f_{14} là hệ số flexomagnetic và r_{14} được tính theo biểu thức $r_{14} = r_3 + 2r_4$:

$$r_3 = \frac{8}{3} r_2 + \frac{2}{5} r_5; r_4 = \frac{\mu}{3} (l_1^2 + 6l_2^2); r_2 = \frac{\mu}{30} (27l_0^2 - 4l_1^2 - 15l_2^2); r_5 = \frac{\mu}{3} (l_1^2 - 3l_2^2) \quad (7)$$

với μ là hằng số Lamé, l_i ($i=0,1,2$) là các tham số vật liệu. Và cần tìm biểu thức của từ trường H_z , nếu không có từ trường ngoài tác dụng lên tấm, điều kiện của từ thông có dạng: $\frac{\partial Q_z^0}{\partial z} = 0$ và

$Q_z^0|_{z=h/2} = 0, Q_z^0|_{z=-h/2} = 0$, từ đó ta tìm được biểu thức của từ trường:

$$H_z = \frac{\bar{q}_{31}}{d_{33}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) z + f_z \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{f_{14}}{d_{33}} \frac{\partial f_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \frac{f_{14}}{d_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Bài báo sử dụng phân tử chữ nhật bốn nút, mỗi nút có 6 bậc tự do:

$$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 \left\{ w_{bi}, w_{si}, \frac{\partial w_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial w_{si}}{\partial x}, \frac{\partial w_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial w_{si}}{\partial y} \right\}^T \quad (9)$$

Hai thành phần chuyển vị w_b và w_s được nội suy như sau:

$$\{w_b, w_s\} = \sum_{i=1}^4 \left\{ R_i \{w_{bi}, w_{si}\} + R_{i+1} \left\{ \frac{\partial w_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial w_{si}}{\partial x} \right\} + R_{i+2} \left\{ \frac{\partial w_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial w_{si}}{\partial y} \right\} \right\} = \{R_b, R_s\} \mathbf{u}_e \quad (10)$$

trong đó R_i là các hàm Hermit.

Các véc tơ trong biểu thức (2)-(3) được viết lại như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_e; \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_e; \gamma_0 = \mathbf{A}_3 \mathbf{u}_e; \boldsymbol{\eta}_b = \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_e; \boldsymbol{\eta}_s = \mathbf{A}_5 \mathbf{u}_e \quad (11)$$

trong đó \mathbf{A}_i ($i=1-5$) là các ma trận vi phân hàm dạng. Biểu thức công khả dĩ thế năng biến dạng của phân tử tấm:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e &= \int_{V_e} (\delta \varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau} + \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\chi} - \delta Q_z^0 H_z) dV + \int_{S_e} \left(k_w \left(1 + c_n \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 + c_n \frac{y^2}{b^2} \right) \delta w_z w_z \right. \\ &\quad \left. + k_s \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_z}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy \quad (12) \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen}) \mathbf{u}_e \end{aligned}$$

trong đó k_w và k_s là hai tham số độ cứng của nền đàn hồi, c_n là hệ số thể hiện sự biến đổi độ cứng của nền nền đàn hồi trong mặt phẳng của tấm, và \mathbf{K}_e^{tam} , \mathbf{K}_e^{nen} là ma trận độ cứng của phần tử tấm nano và ma trận độ cứng do nền đàn hồi tác dụng lên phần tử tấm.

Công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên tấm có dạng:

$$\delta W_e = \int_{S_e} \delta (w_b + w_s)^T \mathbf{P}_S dS = \delta \mathbf{u}_e^T \int_{S_e} (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T \mathbf{P}_S dS = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{F}_e \quad (13)$$

trong đó \mathbf{F}_e là véc tơ ngoại lực tác dụng lên phần tử tấm. Từ các biểu thức (12)-(13), phương trình cân bằng tĩnh của tấm nano có dạng:

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen}) \mathbf{q}_e = \sum_e \mathbf{F}_e \quad (14)$$

Giải phương trình (14), ta sẽ thu được chuyển vị uốn của tấm dưới tác dụng của tải trọng tĩnh.

3. Ví dụ kiểm chứng

Tấm vuông tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, chiều dài các cạnh tấm $a=b$, chiều dày tấm $h = a/10$ và $a/20$, tấm chịu tải trọng phân bố theo quy luật hình sin $p = P_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$, trong đó P_0 là biên độ của tải trọng. Các tham số vật liệu gồm mô đun đàn hồi 117 GPa, hệ số Poisson 0.33. Hai tham số độ cứng của nền đàn hồi được chuẩn hóa như sau: $K_w^* = \frac{k_w a^4}{A_0}$, $K_s^* = \frac{k_s a^2}{A_0}$, với

$$A_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Tham số so sánh là chuyển vị lớn nhất không thứ nguyên được tính toán theo công thức: $c_v = \frac{10^3 A_0}{P_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Bảng 1 thể hiện so sánh chuyển vị lớn nhất của tấm tựa trên nền đàn hồi với các kết quả đã công bố trong các tài liệu [10-11], có thể thấy rằng khi lưới chia phần tử tăng dần thì kết quả tính toán tiệm cận về giá trị giải tích trong các tài liệu tham chiếu [10-11]. Và với lưới chia 10 phần tử mỗi cạnh thì đảm bảo độ chính xác cần thiết, do vậy bài báo sẽ sử dụng lưới chia này để tính toán các kết quả tiếp theo.

Bảng 1. So sánh chuyển vị lớn nhất của tấm tựa trên nền hai hệ số chịu tải trọng hình sin, $b/a=1$

(K_w^*, K_s^*)	[10]	[11]	Present			
			4x4 Elements	8x8 elements	10x10 elements	14x14 elements
$a/h=10$						
$(10^2, 0)$	0.2122	0.2136	0.2272	0.2166	0.2154	0.2145

(0,10 ²)	0.0426	0.0427	0.0452	0.0430	0.0428	0.0427
(10 ² ,10 ²)	0.0409	0.0409	0.0433	0.0412	0.0411	0.0410
<i>a/h=20</i>						
(10 ² ,0)	0.2062	0.2066	0.2190	0.2094	0.2083	0.2074
(0,10 ²)	0.0424	0.0424	0.0438	0.0426	0.0425	0.0424
(10 ² ,10 ²)	0.0407	0.0407	0.0420	0.0409	0.0408	0.0407

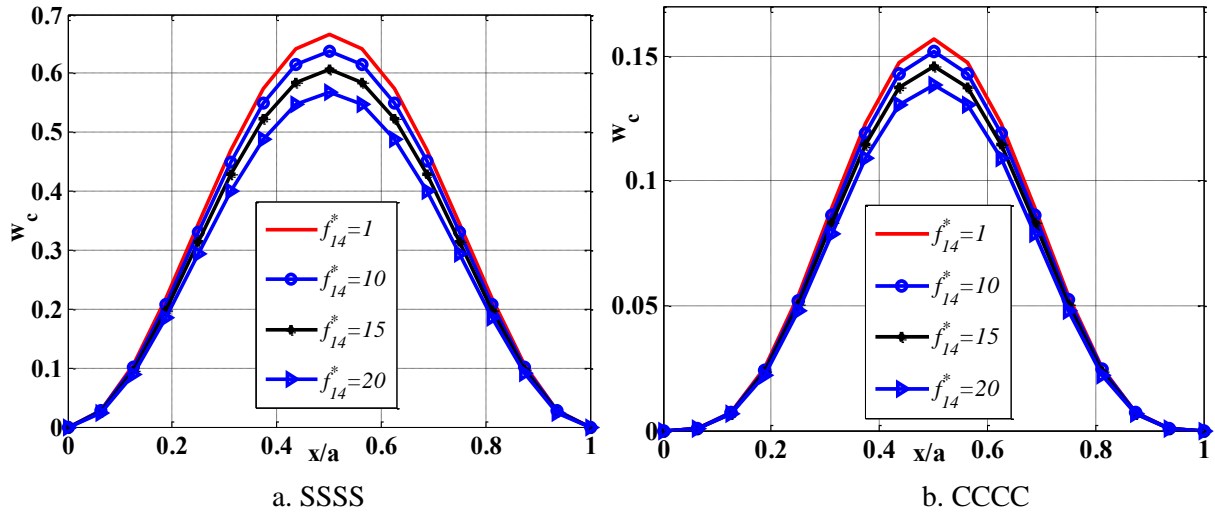
4. Khảo sát số

Tấm nanoplate chịu liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh, các tham số hình học của tấm là $h=a/10$, $a=b=10$ nm, and the material properties are $c_{11}=286$ GPa; $c_{33}=43.50$ GPa; $q_{31}=580.3$ N/Am; $d_{33}=1.57 \cdot 10^{-4}$ N/A². Values of the length scale are $l_0 = l_1 = l_2 = 1$ nm. Nền đàn hồi có ba tham số k_w , k_s và c_n với hai tham số độ cứng được chuẩn hóa như sau: $n_w^* = \frac{12k_w a^4}{c_{11}h_0^3}$, $n_s^* = \frac{12k_s a^2}{c_{11}h_0^3}$, với $h_0 = a/10$.

Tham số được tính toán và khảo sát là chuyển vị dọc theo đường thẳng $y=x$ được chuẩn hóa như sau: $w_c = \frac{10^3 c_{11} h_0^3}{P_0 a^4} w$. Ngoài ra, để thuận lợi cho thể hiện các kết quả tính toán, bài báo sử dụng tham số

$$f_{14}^* = \frac{f_{14}}{f_{14}^0}, \text{ với } f_{14}^0 = 10^{-7} \text{ N/A.}$$

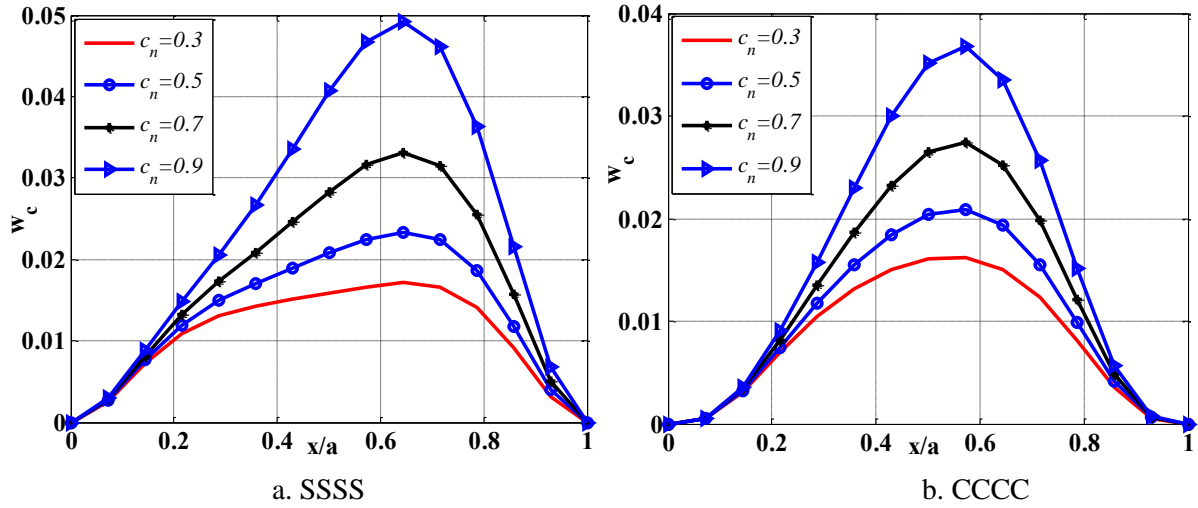
Trên hình 2 thể hiện sự biến đổi đường độ võng dọc theo đường thẳng $y=x$ đối với các giá trị khác nhau của tham số f_{14} . Khi tăng giá trị của f_{14} , độ cứng của tấm tăng lên, do vậy chuyển vị lớn nhất của tấm giảm xuống, chuyển vị lớn nhất của tấm nano trong trường hợp tấm ngàm tất cả các cạnh nhỏ hơn so với trường hợp tấm tựa đơn tất cả các cạnh.



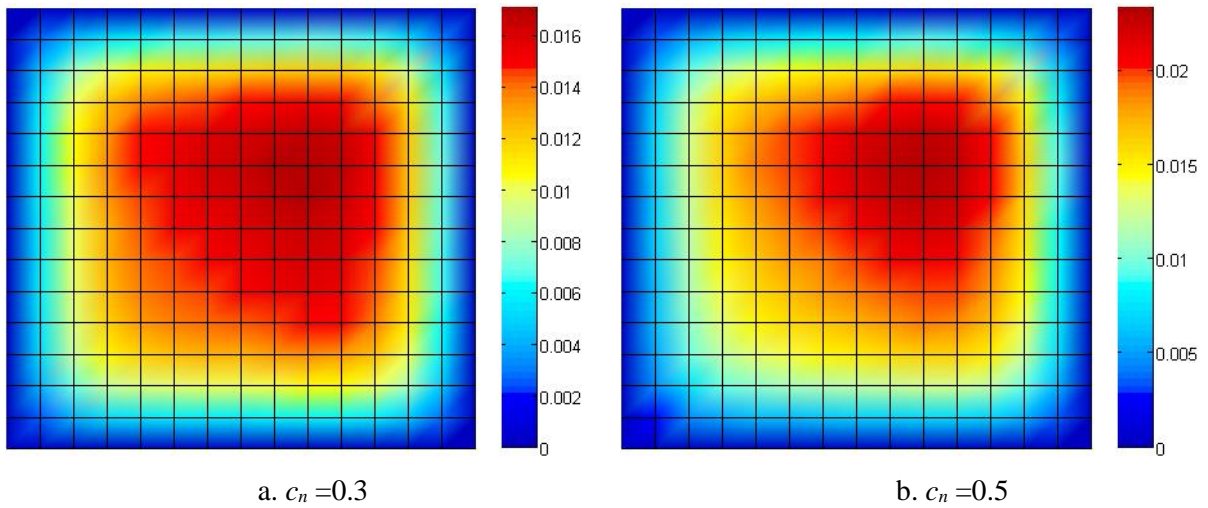
Hình 2. Sự biến đổi của chuyển vị w_c dọc theo đường thẳng $y=x$ phụ thuộc vào f_{14} , $c_w=100$, $c_s=10$, $c_n=0.5$

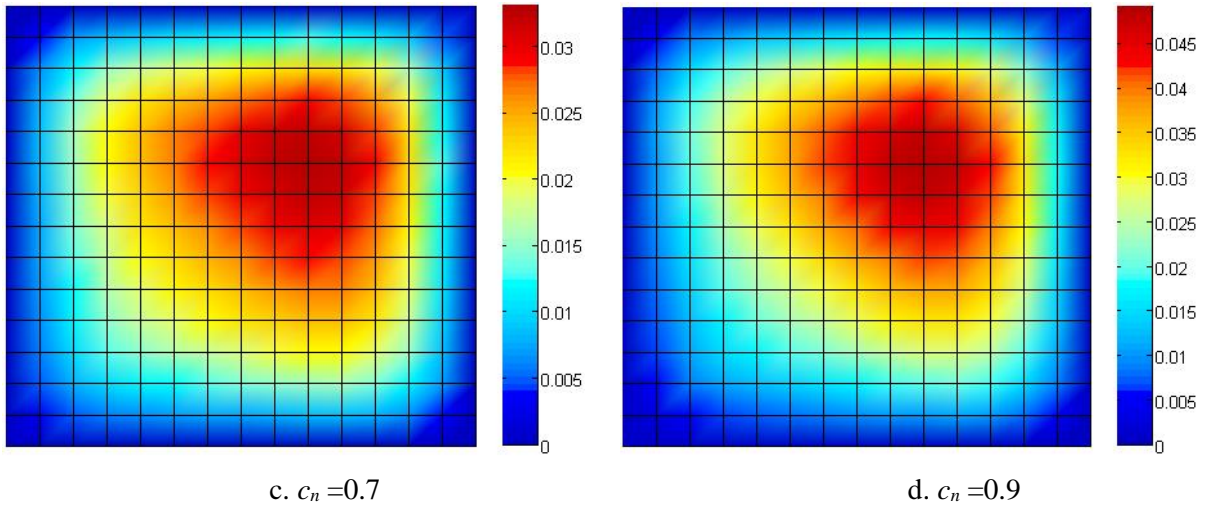
Thay đổi giá trị của tham số c_n , kết quả tính toán chuyển vị dọc theo đường thẳng $y=x$ của tấm nano được chỉ ra như trong hình 3. Ta có thể thấy rằng khi tăng giá trị của tham số c_n thì độ cứng của nền giảm xuống, làm cho độ cứng tổng thể của kết cấu giảm xuống, do vậy chuyển vị lớn nhất của tấm

tăng lên. Trên hình 4 thể hiện độ võng của tấm ứng với các giá trị khác nhau của tham số c_n , các kết quả này chứng tỏ tham số c_n làm ảnh hưởng tới vị trí xuất hiện cực đại của chuyển vị, điều này cho thấy tham số c_n ảnh hưởng tới cả giá trị cực đại của chuyển vị, cũng như ảnh hưởng tới sự phân bố chuyển vị của tấm nano. Ngoài ra, cũng dễ dàng nhận thấy rằng nếu giá trị của tham số c_w càng lớn, thì sự ảnh hưởng của c_n đối với đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano càng thể hiện rõ rệt.



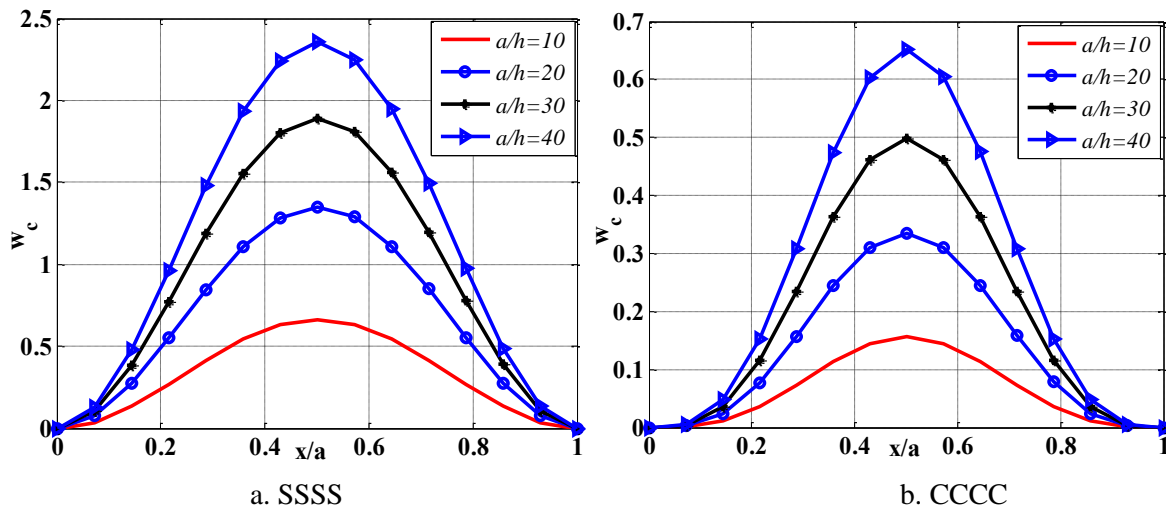
Hình 3. Sự biến đổi của chuyển vị W_c dọc theo đường thẳng $y = x$ phụ thuộc vào c_n , $f_{14}^* = 1$, $c_w = 10^5$, $c_s = 10$



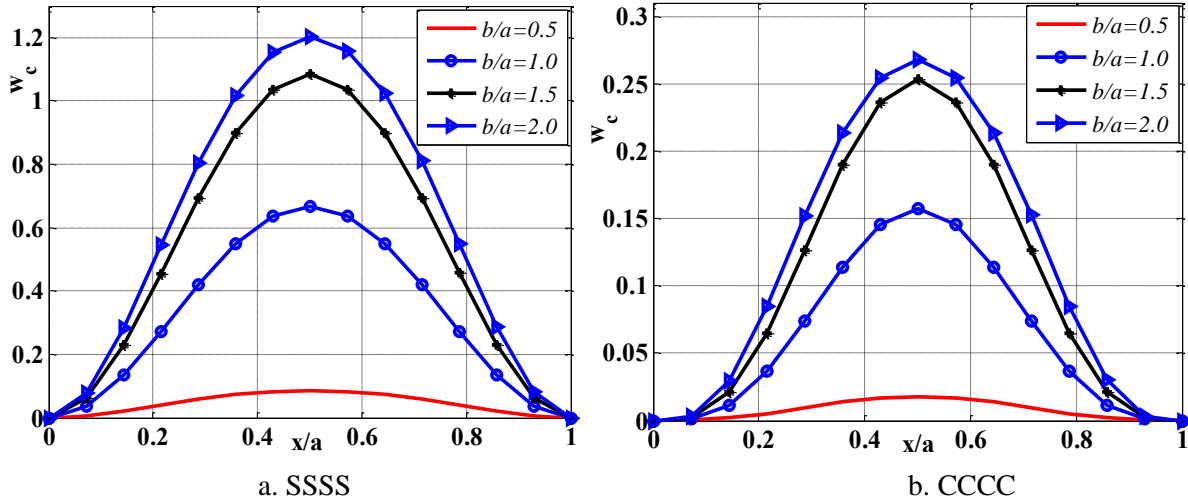


Hình 4. Giá trị chuyển vị w_c của tấm trong mặt phẳng Oxy , $f_{14}^* = 1$, SSSS, $c_w = 10^5$, $c_s = 10$

Trên hình 5 trình bày kết quả tính toán chuyển vị dọc theo đường thẳng $y=x$ khi chiều dày tấm thay đổi và khi tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm thay đổi thì kết quả tính toán chuyển vị được thể hiện như trên hình 6. Các kết quả tính toán chứng tỏ rằng khi tấm càng mỏng, tỷ lệ b/a càng lớn thì độ cứng của tấm nano càng giảm, kết quả là chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên.



Hình 5. Sự biến đổi của chuyển vị w_c dọc theo đường thẳng $y=x$ phụ thuộc vào tỷ lệ a/h , $f_{14}^* = 1$, $c_n=0.5$, $c_w = 100$, $c_s = 10$, $a/b=1$



Hình 6. Sự biến đổi của chuyển vị w_c dọc theo đường thẳng $y = x$ phụ thuộc vào tỷ lệ b/a , $f_{14}^* = 1$, $c_w = 100$, $c_s = 10$, $c_n = 0.5$, $a/h = 10$

5. Kết luận

Trên cơ sở của lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, bài báo đã nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano trên nền đàn hồi có độ cứng biến đổi và chịu ảnh hưởng của hiệu ứng từ. Phân tử bốn nút, mỗi nút có sáu bậc tự do đã được sử dụng để xây dựng phương trình cân bằng cho tấm và tiến hành giải phương trình này để tìm ra chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano. Thông qua việc so sánh với các kết quả đã công bố, bài báo đã chứng minh sự hội tụ cũng như độ tin cậy của lý thuyết tính toán. Bài báo cũng tiến hành một số khảo sát số để tìm ra ảnh hưởng của một số tham số kết cấu, nền đàn hồi và điều kiện biên đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano. Đây là các kết quả có giá trị tham chiếu, định hướng trong việc thực tế thiết kế và chế tạo các kết cấu nano.

Tài liệu tham khảo

- [1] D. H. Doan, A. M. Zenkour, D. V. Thom. Finite element modeling of free vibration of cracked nanoplates with flexoelectric effects. *The European Physical Journal Plus*, **137**, (4), (2022), pp. 1-15.
- [2] L. M. Thai, D. T. Luat, V. B. Phung, P. V. Minh, and D. V. Thom. Finite element modeling of mechanical behaviors of piezoelectric nanoplates with flexoelectric effects. *Archive of Applied Mechanics*, **92**, (1), (2022), pp. 163–182.
- [3] N. C. Tho, N. T. Thanh, T. D. Tho, P. Van Minh, L. K. Hoa. Modelling of the flexoelectric effect on rotating nanobeams with geometrical imperfection. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **43**, (11), (2021), 510.
- [4] D. H. Duc, D. Van Thom, P. H. Cong, P. Van Minh, N. X. Nguyen. Vibration and static buckling behavior of variable thickness flexoelectric nanoplates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **51**, (12), (2022), pp. 7102-7130.
- [5] D. H. Duc, D. Van Thom, P. M. Phuc. Buckling Analysis of Variable Thickness Cracked Nanoplates considering the Flexoelectric Effect. *Transport and Communications Science Journal*, **73**, (5), (2022), pp. 470–485.
- [6] N. Zhang, S. Zheng, D. Chen. Size-dependent static bending, free vibration and buckling analysis of curved flexomagnetic nanobeams. *Meccanica*, **57**, (7), (2022), pp. 1505–1518.
- [7] D. M. Tien, D. V. Thom, P.V. Minh, N.C. Tho, T.N. Doan, D.N. Mai. The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **52**, (1), (2024), pp. 588-610.
- [8] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, **29**, (8),

- (1991), pp. 901–916.
- [9] K. P. Soldatos. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, **94**, (3–4), (1992), pp. 195–220.
- [10] A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal. Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory. *Journal Therm. Stress*, **42** (2), (2019), pp. 213–232.
- [11] I. M. Mudhaffar, A. Tounsi, A. Chikh, M. A. Al-Osta, M. M. Al-Zahrani, S. U. Al-Dulaijan. Hygrothermo-mechanical bending behavior of advanced functionally graded ceramic metal plate resting on a viscoelastic foundation. *Structures*, **33**, (2021), pp. 2177–2189.